DIMENSI METRIK SISI PADA KELUARGA GRAF TANGGA

Robiatul Adawiyah[1]*, Rafiantika Megahnia Prihandini[2]
[1]Universitas Jember, Indonesia
[2]Universitas Jember, Indonesia
*E-mail: robiatul@unej.ac.id

ABSTRACT

Misalkan G adalah graf terhubung dan sederhana, dinotasikan sebagai $G = (V, E)$*, dengan* V *adalah himpunan titik dan* $E = uw$ *adalah sebuah sisi. Jarak antara titik v dan sisi e dinotasikan sebagai* $d_G(e, v) = min\,\{d(u, v), d(w, v)\}$*. Titik* $w \in V$ *membedakan dua sisi* $e_1, e_2 \in E$ *jika* $d_G(e_1, w) \neq d_G(e2, w)$*. Himpunan titik W dari graf terhubung G adalah generator dimensi metrik sisi pada G jika untuk setiap dua sisi dari G dibedakan oleh beberapa titik dari* S*. Dimensi metrik sisi merupakan kardinalitas minimum dari semua genetor dimensi metrik sisi pada G yang dilambangkan dengan* $\dim_E(G)$*. Pada Penelitian ini, akan diteliti dimensi metrik sisi pada beberapa keluarga graf tangga yaitu graf tangga* L_n *dan graf tangga miring* SL_m*, untuk* $m, n \geq 2$.

Keyword : Dimensi Metrik Sisi, Generator Dimensi Metrik Sisi. Keluaraga Graf Tangga.

PENDAHULUAN

Dimensi Metrik sisi adalah salah topik dalam pembahasan mengenai jarak dalam graf. Topik ini merupakan pengembangan dari topik dimensi metrik yamg pertama kali diperkenalkan oleh Slater [7], Harary dan Melter [6]. Pada pembahasan mengenai dimensi metrik, fokus pembahasan kita hanya terletak pada jarak antar titik. Namun, pada pembahan mengenai dimensi metrik sisi pembahasan kita menjadi lebih kompleks. Pada topik ini kita juga mempertimbangkan serta menganalisis jarak antara titik dan sisi pada suatu graf.

Konsep mengenai dimensi metrik dapat diaplikasikan dalam bebarapa bidang. Salah satunya adalah menentukan koordinat navigasi suatu alat transportasi misalnya automous electric shuttle bus. Dengan menerapkan konsep dimensi metrik, automous electric shuttle bus bergerak berdasarkan koordinat dari suatu titik atau lokasi menuju koordinat atau lokasi yang lainnya. Konsep dimensi metrik mampu meminimalkan kesalahan yang terjadi dalam menerjemahkan petunjuk (kode) yang didapatkan dari titik-titik lokasi pemberhentian tersebut. Oleh karena itu, kode yang berbeda dan unik harus didapatkan pada setiap titik lokasi pada bidang gerak automous electric shuttle bus harus. Jika posisi lokasi pemberhentian dipandang sebagai titik dan lintasan yang dilalui automous electric shuttle bus dipandang sebagai sebuah sisi, maka bidang gerak automous electric shuttle bus dapat direpresentasikan sebagai graf.

Misalkan G adalah graf terhubung dan sederhana dengan V himpunan titik dan E himpunan sisi [5]. Jarak antara simpul u dan v didefinisikan sebagai lintasan terpendek dari simpul u ke v di G dan dinotasikan $d(u, v)$. Jika diberikan suatu himpunan terurut $W = \{w1, w2, w3, \dots, wk\} \subseteq V(G)$ dari simpul-simpul dalam graf terhubung G dan

---

[1] Dosen Pend. Matematika FKIP Universitas jember
[2] Dosen Pend. Matematika FKIP Universitas jember

simpul v di V (G), maka representasi dari simpul v terhadap W adalah $r(v\,\big|\,W) = (d(v,w1\,), d(v,w2\,), \dots, d(v,wk\,))$. Jika $r(v|W)$ untuk setiap simpul $v \in V(G)$ bebeda, maka W disebut sebagai himpunan pembeda dari V(G). Kardinalitas minimum dari himpunan pembeda atau basis dari G disebut dimensi metrik[2, 3, 4].

Pada topik mengenai dimensi metrik sisi, kita juga mempertimbangkan jarak antara titik dan siis pada suatu graf. Jarak antara titik v dan sisi e dinotasikan sebagai $\mathrm{d_G(e,v)} = \min\{\mathrm{d(u,v), d(w,v)}\}$. Titik $\mathrm{w} \in \mathrm{V}$ membedakan dua sisi pembeda $\mathrm{e_1, e_2} \in \mathrm{E}$ jika $\mathrm{d_G((e_1,w)} \neq \mathrm{(e2,w))}$. Himpunan titik W dari graf terhubung G adalah metrik pembeda sisi pada G jika untuk setiap dua sisi dari G dibedakan oleh beberapa titik dari S. Dimensi metrik sisi merupakan kardinalitas minimum dari semua generator dimensi metrik pada graf G yang dilambangkan dengan $\dim_E(G)$ [1,8].

Pada artikel ini akan dibahas mengenai dimensi metrik pada keluarga graf tangga yaitu graf tangga L_n dan graf tangga miring SL_n.

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deduktif aksiomatik dan metode pendeteksi pola.

a. Metode deduktif aksiomatik
   Metode ini merupakan suatu metode penelitian yang menerapkan prinsip pembuktian yang berlaku pada logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah tersedia sebelumnya. Setelah itu diterapkan pada analisis dimensi metrik sisi pada keuarga graf tangga .
b. Metode pendetteksi pola
   Metode pendetteksi pola metode yang digunakan untuk menentukan pola, baik kardinalitas maupun dimensi metrik sisi.pada keluarga graf tangga.

Penelitian ini bersifat eksploratif yang bertujuan untuk menemukan sesuatu hal yang baru yang ingin diketahui peneliti dan hasilnya dapat digunakan sebagai bahan kajian untuk penelitian selanjutnya. Penelitian ini termasuk penelitian eksploratif sebab tujuan dari penelitian ini untuk memberikan gambaran dasar dari topik pembahasan, mengembangkan gagasan dan teori yang bersifat dapat diubah, dan mengembangkan teori yang membuka kemungkinan diadakan penelitian lanjutan mengenai topik yang dibahas.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas mengena hasil penelitian mengenai dimensi metrik sisi pada keluarga graf tangga. Penelitian ini diawali dengan memilih jenis graf yang akan diteliti. Selanjutnya, dilakukan penentuan kardinalitas dari keluarga graf tangga yang akan diteliti. Kemudian melakukan pencarian generator dimensi metrik sisi pada graf yang telah dipilih, hingga didapatkan generator dimensi metrik sisi paling minimum. Banyaknya elemen dari himpunan generator dimensi metrik sisi paling minimum tersebut merupakan dimensi metrik sisi yang akan disajikan dalam beberapa teorema yang dapat digunakan untuk peneliti lain. Berikut adalah hasil penelitian mengenai dimensi metrik sisi pada keluarga graf tangga.

Teorema 1. Dimensi metrik sisi pad agraf tangga L_n adalah 2 untuk $n \geq 2$

Bukti. Graf tangga L_n adalah suatu graf tidak berarah dan merupakan graf planar dengan kardinalitas titik dan kardinalitas sisi sebagai berikut : $2n$ dan $3n-2$. Misalkan himpunan titik dan himpunan sisi pada graf $G = L_n$ didefinisikan sebagai berikut $p = V(L_{\{n,m\}}) = \{x_i;\ 1 \leq\ i \leq\ n\} \cup \{y_i;\ 1 \leq\ i \leq\ n\} dan\ q = E(L_{\{n\}}) = \{x_i\ x_{\{i+1\}};\ 1 \leq\ i \leq\ n-1\} \cup \{y_i\ y_{\{i+1\}};\ 1 \leq\ i \leq\ n-1\} \cup \{x_i y_i;\ 1 \leq\ i \leq\ n\}$. Untuk membuktikan dimensi metrik sisi pada graf tangga L_n adalah dua untu n $\geq$ 2 maka kita harus melakukan analisis batas atas dan batas bawah pada dimensi metriksisi pada graf tangga L_n tersebut.

Pertama, kita akan menunjukkan bahwa dimensi metrik sisi pada graf tersebut adalah $dim_E(L_n) \leq\ 2$. Misalkan kita memilih generator dimensi metrik sisi dari graf tangga L_n adalah $S = \{y_i, y_n\}$. Dengan memilih generator dimensi metrik sisi tersebut, kita mendapatkan representasi dari keseluruhan sisi yang ada pada graf tangga $e \in\ E(L_{\{n\}})$ terhadap S yang dapat dilihat pada table 1 berikut ini:

Tabel 1. Representasi Sisi dari $e \in \mathbf{L_n}$ terhadap S

e	$r(e\|S)$	Kondisi
$x_i x_{i+1}$	$(i, n-i)$	$1 \leq i \leq n-1$
$y_i y_{i+1}$	$(i-1, n-i-1)$	$1 \leq i \leq n-1$
$x_i y_i$	$(i-1, n-1)$	$1 \leq i \leq n$

Berdasarkan Tabel 1 tersebut, kita dapat melihat bahwa keseluhan representasi dari sisi pada graf tangga terhadap generator dimensi metrik sisi berbeda. Representasi dari sisi $x_i x_{i+1}$ adalah $(i, n-i)$, representasi dari sisi $y_i\ y_{i+1}$ adalah $(i-1, n-i-1)$, dan representasi dari sisi $x_i y_i$ adalah $(i-1, n-1)$. Berdasarkan analisis tersebut, kita dapat menyimpulkan bahwa batas atas dari dimensi metrik sisi pada graf tangga adalah dua atau $dim_{E(G)} \leq\ 2$.

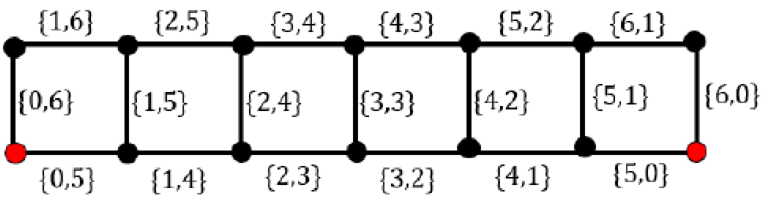
Selanjutnya kita akan menganalisis batas bawah dari dimensi metrik sisi pada graf tangga L_n. Kita akan membuktika bahwa $dim_E(L_n) \geq\ 2$. Untuk membuktikan batas bawah tersebut, kita misalkan $dim_E(L_n) < 2$, misalkan $|S|$=1. Dengan mempertimbangkan bahwa kardinalitas dari generator metrik sisi adalah 1, maka akan ada beberapa kemungkinan peletakan dari generator dimensi metrik sisi pada graf L_n. Berikut adalah beberapa kemungkinan tersebut:

a. Misalkan kita memilih generator dimensi metrik sisi pada L_n yaitu x_i. Jika kita memiliki hanya satu titik pada x_i sebagai generator dimensi metrik sisi, maka akan ada beberapa sisi yang memiliki representasi yang sama terhadap S. Sisi tersebut anatara lain adalah sebagai berikut : $r(y_i y_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1|S) = r(x_i y_i, 1 \leq i \leq n-1|S)$ serta $r(x_i x_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1|S) = r(x_i y_i, 2 \leq i \leq n-1|S)$.
b. Kemungkinan kedua, kita meletakkan generator dimensi metrik sisi pada titik y_i. Jika kita memilih hanya satu titik sebagai generator dimensi metrik sisi pada

graf L_n yang terletak di y_i, maka hal ini akan menyalahi definisi dari dimensi metrik sisi dimana keseluruhan representasi dari sisi terhadap S haruslah berbeda. Namun, jika kita hanya memiliki satu titik sebagai generator dimensi metrik sisi yang terletak di y_i maka akan ada sisi yang memiliki representasi yang sama yaitu : $r(x_i x_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1|S) = r(x_i y_i, 1 \leq i \leq n-1|S)$ dan $r(y_i y_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1|S) = r(x_i y_i, 2 \leq i \leq n-1|S)$.

Berdasarkan analisis tersebut, maka tidaklah mungkin jika $dim_E(L_n) < 2$. Hal tersebut akan menjadi suatu kontradiksi dengan definisi dari dimensi metrik sisi dimana $d_G(e_1, w) \neq d_G(e2, w)$ untuk $e_1, e_2 \in E$. Oleh karena itu, batas bawah dari dimensi metrik sisi pada graf tangga seharusnya adalah $dim_{E(G)} \geq 2$.

Berdasarkan batas atas dan batas bawah yang telah dianalisis, maka didapatkan $dim_E(L_n) \leq 2$ dan $dim_E(L_n) \geq 2$. Dengan adanya fakta tersebut, kita dapat menyimpulkan bahwa $dim_E L_n = 2$. Comtoh dari dimensi metrik sisi pada graf tangga L_7 dapat dilihat pada gambar 1. Titik yang bergambar merah merupakan generator dimensi metrik sisi pada graf L_7.



Gambar 1. Dimensi Metrik Sisi pada Graf L_7

Teorema 2. Dimensi metrik sisi pada graf tangga miring SL_m adalah 2 untuk $m \geq 2$

Bukti. Graf tangga miring dinotasikan dengan SL_m adalah sebuah graf planar yang diperoleh dari dua buah graf lintasan yaitu $x_1, x_2, x_3, ... x_m$ dan $y_1, y_2, y_3, ... y_m$ dengan menghubungkan titi x_j dengan y_{j+1} untuk $1 \leq j \leq m$. Himpunan titik dan sisi pada graf SL_m adalah sebagai berikut: $V(SL_m) = \{x_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(SL_m) = \{x_j x_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\}$. Kardinalitas titik dan himpunan dari graf SL_m adalah $|V| = 2m$ dan $|E| = 3m - 3$. Pada teorema ini, kita harus membuktikan dimensi metrik sisi dari graf SL_m adalah dua untuk $m \geq 2$ dengan menunjukkan batas atas dan batas bawah dari dimensi metrik sisi pada graf tangga miring. Kita harus membuktikan bahwa $dim_E(SL_m) \leq 2$ dan $dim_E(SL_m) \geq 2$.

Pertama, kita analisis batas bawah dari dimensi metrik sisi pada graf tangga miring SL_m. Kita akan menunjukkan bahwa $dim_E(SL_m) \geq 2$ dengan menggunakan kotradiksi. Kita misalkan $dim_E(SL_m) < 2$. Misalkan $|S| = 1$. Jika kita memiliki hanya satu elemen dari titik yang ada pada graf SL_m sebagai elemen dari generator dimensi metrik, maka akan ada dua kasus kemungkinan peletakan dari titik elemen S sebagai berikut:

a. Misalkan kita letakkan titik sebagai elemen dari generator dimensi metrik sisi pada lintasan x_j. Jika kita hanya memiliki satu titik elemen S pada graf SL_m, maka akan ada sisi yang memiliki representasi yang sama. Sisi- sisi tersebut antara lain adalah sebagai berikut: $r(x_jx_{j+1}, 1 \leq j \leq m-1|S) = r(x_jy_{j+1}, 1 \leq j \leq m-1|S)$ dan $r(y_jy_{j+1}, 1 \leq j \leq m-2|S) = r(x_jx_{j+1}, 2 \leq i \leq n-3|S)$. Sisi-sisi tersebut memilki representasi yang sama. Oleh karena itu, hal tersebut kontradiksi dengan definisi dimensi metrik sisi.
b. Kemungkinan kedua kita letakkan generator dimensi metrik sisi pada lintasan y_j. Jika $|S| = 1$, representasi dari sisi-sisi yang ada pada graf SL_m terhadap S adalah sebagai berikut: $r(y_jy_{j+1}, 2 \leq j \leq m-1|S) = r(x_jy_{j+1}, 1 \leq j \leq m-1|S)$ dan $r(x_jx_{j+1}, 1 \leq j \leq m-2|S) = r(x_jx_{j+1}, 2 \leq i \leq n-3|S)$. Dari representasi tersebut, kita dapat melihat bahwa terdapat representasi yang sama pada sisi-sisi dalam graf SL_m. Oleh karena itu, terjadi kontradiksi.

Berdasarkan analisis diatas, dapat kita simpulkan bahwa batas bawah dari dimensi metrik sisi pada graf tangga mirin SL_n adalah dua, atau $dim_E(SL_m) \geq 2$.

Selanjutnya, kita akan menganalisis batas atas dari dimensi metrik sisi pada graf SL_m. Berdasarkan Tabel 2, dengan memilih $S = x_j, x_m$, kita dapat melihat bahwa representasi dari keseluruhan sisi yang terdapat pada graf tangga miring adalah berbeda. Representasi dari sisi y_jy_{j+1} terhadap S tidak sama dengan representasi dari sisi x_jx_{j+1}. Repsesentasi dari kedua sisi tersebut juga tidak sama dengan representasi dari sisi x_jy_{j+1}. Tabel representasi sisi dari $e \in SL_m$ terhadap S dapat dilihat pada Tabel 2. Karena $S = \{x_j, x_m\}$, maka $|S| = 2$. Dengan kata lain, batas atas dari dimensi metrik sisi pada graf tangga miring SL_n adalah dua.

Tabel 2. Representasi Sisi dari $e \in SL_n$ terhadap S

e	$r(e\|S)$	Kondisi
y_jy_{j+1}	$(j-1, m-j-1)$	$1 \leq j \leq m-1$
x_jx_{j+1}	$(j-1, m-j)$	$1 \leq j \leq m-1$
x_jy_{j+1}	$(j, m-j-1)$	$1 \leq j \leq m$

Berdasarkan analisis dari batas atas dan batas bawah dimensi metrik sisi pada graf tangga miring SL_m untuk $m \geq 2$, kita dapatkan $dim_E(SL_m) \leq 2$ dan $dim_E(SL_m) \geq 2$. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa dimensi metrik sisi pada graf tangga miring SL_m untuk $m \geq 2$ adalah dua, atau $dim_E(SL_m) = 2$.

KESIMPULAN

Pada artikel ini, dibahas topik baru dalam pembahasan mengenai jarak pada suatu graf yaitu dimensi metrik sisi. Fokus penelitian yang dilakukan adalah observasi mengenai dimensi metrik sisi pada keluarga graf tangga yaitu graf tangga L_n serta graf tangga miring SL_n. Berdasarkan analisis, didapatkan nilai dari dimensi metrik sisi pada graf tangga L_n adalah dua untuk $n \geq 2$. Nilai yang sama juga didapatkan untuk dimensi metrik sisi pada graf tangga miring SL_m, yaitu $dim_E(SL_m) = 2$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Adawiyah R, Dafik, Alfarisi R, Prihandini R H & Agustin I H (2019) Edge Metric Dimension on Some Families of Tree *IOP Conf. Series: Journal of Physics* 1180 012005

[2] Adiwijaya. 2016. Matematika Diskrit dan Aplikasinya.Bandung: Alfabeta.

[3] Chartrand G and Lesniak L (2000) *Graphs and digraphs 3rd* ed . London: Chapman and Hall).

[4] Diestel, R. (2005). Graph Teory. Berlin: Springer–Verlag.

[5] Harju, Tero. (2012). Graph Theory. Finland: Department of Mathematics University of Turku.

[6] Harary F and Melter RA (1976) On The metrik dimension of a graph *Ars Combin* (2) 191-195

[7] Slater P J 1975 Leaves of trees *Proc. 6th Southeast Conf. Comb., Graph Theory, Comput. Boca Rotan* (14) 549-559

[8] *Rahman, S. 2017. Basic Graph Theory. Bangladesh : Springer International Publishing.*