KADIKMA: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika
Vol. 13, No. 3, Desember 2022, Hal. 203-218
e-ISSN : 2686-3243 ; p-ISSN : 2085-0662
https://jurnal.unej.ac.id/index.php/kadikma
https://doi.org/10.19184/kdma.v13i3.35418

ANALISIS METODE MUTUA DAN APLIKASINYA TERHADAP DIFERENSIAL LINEAR ORDE-N

Maswar[1]*, Mujib MT[2]
[1]Universitas Ibrahimy Situbondo, Indonesia
[2]Universitas Islam Jember, Indonesia
*E-mail: maswar@ibrhimy.ac.id

Article History:
Received: 18-09-2022; Revised: 20-10-2022; Accepted: 21-11-2022

ABSTRAK

Penelitian ini adalah penelitian studi literatur berkaitan dengan persamaan diferensial orde 1, orde 2, dan orde-n. Secara khusus, ketika berhadapan dengan persamaan diferensial linear orde-n dengan koefisien tak tentu dari bentuk Ae^{cx} dan Axe^{cx}, solusi umum metode koefisien tak tentu yang ada sejauh ini memerlukan prosedur penyelesaian yang panjang. Analisis terhadap metode koefisien taktentu, metode operator D, metode reduksi orde dan metode mutua, mulai dari definisi dan contoh-contoh prosedur penyelesaian dilakukan secara teliti dan komprehensif. Berdasarkan hasil analisis terhadap semua metode tersebut untuk polinomial koefisien tak tentu bentuk Ae^{cx} dan $Ax^n e^{cx}$ diketahui bahwa metode mutua cenderung lebih mudah dan cepat menemukan solusi dibandingkan dengan metode biasa. Metode mutua lebih cepat dan mudah diterapkan pada persamaan diferensial linear orde tinggi, karena prosedur penyelesaian yang digunakan lebih sederhana dalam mendapatkan solusi integral tentu dan solusi umum PD. Kekurangan dari metode mutua, ada rumus matematis yang dalam penulisannya kurang lengkap dengan yang diterapkan pada uji bilangan. Temuan peneliti bahwa untuk c yang sama dengan $k = 1$, dapat pula dikerjakan langsung menggunakan rumus yang pertama, yang terpenting pengguna bisa memahami bahwa banyaknya k menunjukkan banyaknya pangkat tertinggi dari variabel x dalam PD linear orde-n.

Keywords: : Metode Mutua, Metode Koefisien Taktentu, Metode Operator D, Metode Reduksi Orde, Aplikasi PD Linear

ABSTRACT

This research is a literature study related to first-order, second-order, and nth-order differential equations. In particular, when dealing with nth-order linear differential equations with indeterminate coefficients of the form Ae^{cx} and Axe^{cx}, the general solution of the existing indeterminate coefficient methods so far requires a lengthy solution procedure. The definitions and examples of the solution procedures of the indeterminate coefficient method, the D operator method, the order reduction method and the mutua method are analyzed thoroughly and comprehensively. Based on the analysis of all these methods for indeterminate coefficient polynomials of the form $Ae^{cx}$and $Ax^n e^{cx}$, it is known that the mutua method tends to be easier and faster to find solutions compared to ordinary methods. The mutua method is faster and easier to apply to higher order linear differential equations, because the solution procedure used is *simpler in obtaining definite integral solutions and general PD solutions. Disadvantages of the mutua method, there are mathematical formulas that are incomplete in writing with those applied to the number test. The researcher found that for the same c with k = 1, it can also be done directly using the first formula, the most important thing is that the user can understand that the number of k indicates the number of the highest rank of the variable x in the nth-order linear PD.*

Keywords: Method of Mutua, Method of Indeterminate Coefficient, Method of Operator D, Method of Order Reduction, Linear PD Application

PENDAHULUAN

Banyak persoalan nyata yang membutuhkan penyelesaian menggunakan konsep ekonomi, bisnis dan industri. Sebagai salah satu induk ilmu, matematika mempunyai peranan penting yang tak boleh diabaikan. Matematika secara kontinu atau terus-menerus dipelajari dari generasi ke generasi, terus digali dan dikembangkan kemanfaatannya untuk kemaslahatan ummat secara majemuk.

Matematika adalah salah satu cabang ilmu pengetahuan eksak dan terorganisir secara sistematik. Matematika juga merupakan ilmu pengetahuan tentang bilangan dan kalkulasi [1]. Matematika memiliki peranan penting dan merupakan salah satu komponen pendidikan dasar dalam bidang pengajaran. Salah satu tujuan matematika pada pendidikan adalah agar siswa memiliki kemampuan memahami konsep matematika, menjelaskan keterkaitan antar konsep dan mengaplikasikan konsep secara luwes, akurat, efisien, dan tepat dalam pemecahan masalah. Matematika sebagai suatu bidang ilmu yang merupakan adat pikir, berkomunikasi, alat untuk memecahkan berbagai persoalan praktis, yang unsur-unsurnya logika dan intuisi, analisis dan konstruksi, generalitas dan individualitas, dan mempunyai cabang-cabang antara lain aritmatika, aljabar, geometri, dan analisis [2].

Pada era revolusi industri 4.0, menuntut seseorang akan banyak hal yang sangat kompleks untuk dikuasai baik di bidang *Science, Tekhnology, Engineering and Mathematics* (STEM). Pada dasarnya, STEM merupakan salah satu upaya yang diproyeksikan untuk merevolusi pembelajaran di masa depan. STEM juga merupakan kurikulum pendidikan yang berfokus pada mata pelajaran Sains, Tekhnologi, Teknik dan Matematika. Di antara keempat dasar ilmu pengetahuan yang harus dimiliki, matematika adalah disiplin ilmu yang sangat elementer. Matematika merupakan ilmu yang berhubungan dengan numerasi, pola perubahan, hubungan, ruang dan bentuk. Matematika juga didefinisikan sebagai disiplin ilmu yang bersifat abstrak dan penuh dengan pemecahan masalah yang rumit [3].

Persamaan diferensial merupakan salah satu bagian menarik dalam matematika yang banyak digunakan pada percobaan matematika. Dalam hal ini persamaan diferensial melibatkan turunan yang dapat diinterprestasikan sebagai laju perubahan. Persamaan diferensial adalah persamaan matematika dalam suatu fungsi satu variabel atau lebih yang menghubungkan nilai fungsi itu sendiri dan turunannya dalan berbagai orde. Orde dari suatu persamaan diferensial adalah turunan tertinggi yang muncul dalam persamaan tersebut. Sebagai contoh: $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 0$, merupakan persamaan diferensial berorde dua [4].

Persamaan diferensial merupakan salah satu bagian dari kajian matematika yang dipelajari di lembaga sekolah hingga perguruan tinggi. Persamaan diferensial adalah setiap persamaan yang di dalamnya terdapat turunan atau diferensial [5]. Aplikasi ilmu ini menyentuh pada beberapa kasus nyata, antara lain: masalah pertumbuhan eksponensial, peluruhan bahan radioktif, radiocarbon dating, rangkaian listrik, hukum Hooke untuk pegas, hukum tegangan Kirchoff dan hukum newton kedua.

Penelitian yang dilakukan oleh Malik tentang penyelesaian persamaan diferensial orde satu menggunakan Metode Simetri Lie [6]. Metode Simetri Lie merupakan suatu metode penyelesaian dari persamaan diferensial dan mereduksi order dari persamaan diferensial sehingga mudah untuk ditentukan solusinya. Metode ini menggunakan konsep kesimetrian yang dapat digunakan pada suatu ekspresi aljabar. Sebagai ilustrasi, persamaan $y = x^4$ atau $y = cos\, x$ mempunyai sifat simetri, yaitu suatu transformasi $x \rightarrow -x$ memetakan grafik $y = x^4$ ke $y = x^4$ itu sendiri dan juga transformasi $x \rightarrow x + 2\pi$ memetakan $y = cos\, x$ kembali ke $y = cos\, x$ [6].

Adanya metode Simetri Lie ternyata belum juga memberikan kemudahan dalam penyelesaian persamaan diferensial, terutama pada persamaan diferensial tingkat tinggi. Mayoritas mahasiswa banyak mengalami kesulitan pada persamaan diferensial orde dua dan orde-n tak homogen dengan koefisien tak tentu. Hal ini sama dengan apa yang disampaikan oleh Cipta dan Dahlan bahwa dalam proses pembelajaran persamaan diferensial, terkadang mahasiswa tidak lepas dari kendala dan kesulitan dalam memahami konsep materi persamaan diferensial [7]. Hal ini dapat dilihat dari hasil Ujian Tengah Semester (UTS) atau Ujian Akhir Semester (UAS) yang tidak sesuai dengan harapan yang diinginkan. Lebih lanjut, mereka mengatakan bahwa selama beberapa tahun terakhir dalam proses belajar mengajar persamaan diferensial di kelas, mahasiswa cenderung kesulitan pada dua hal. Pertama, mahasiswa kesulitan ketika dihadapkan dengan permasalahan kontekstual yakni mahasiswa kesulitan dalam mengubah masalah nyata ke dalam bentuk model matematika. Kedua, mahasiswa mengalami kesulitan dalam mengaitkan konsep-konsep untuk memecahkan permasalahan persamaan diferensial yang melibatkan penggunaan konsep-konsep turunan dan integral. Penggunaan konsep turunan dan integral ini dapat ditemukan di dalam pokok bahasan persamaan diferensial (PD) linear orde 1, 2, hingga orde-n homogen dan tak homogen bentuk koefisien tak tentu.

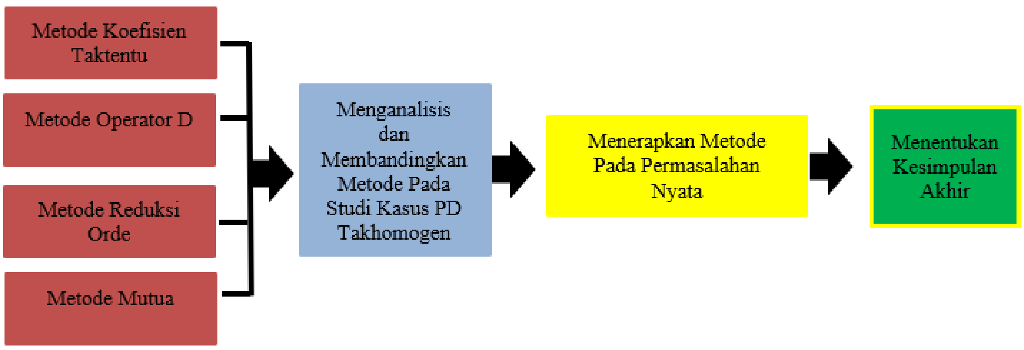
Pada pembelajaran persamaan diferensial, biasanya mahasiswa mengalami tiga kesulitan. Pertama, mahasiswa kesulitan dalam membuat pemodelan persamaan diferensial ketika menyelesaikan soal-soal aplikasi. Kedua, mahasiswa kesulitan menyelesaikan soal yang terkait konsep-konsep yang menjadi syarat dalam pembelajaran persamaan diferensial yaitu turunan dan integral. Ketiga, mahasiswa kesulitan dalam menafsirkan solusi penyelesaian hubungannya dengan permasalahan yang disajikan.

Persamaan diferensial (PD) linear orde satu dituliskan dalam bentuk umum: $y' + py = r$. PD linear orde dua dituliskan dalam bentuk umum: $y'' + py + qy = r$. Sedangkan PD linear orde-n dituliskan sebagai berikut: $y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + p_1 y' + p_0 y = r$. Dari bentuk umum PD tersebut, untuk membedakan sebagai PD homogen dan tak homogen dapat dilihat dari nilai r. Jika nilai $r = 0$, maka PD tersebut homogen. Sebaliknya, apabila nilai $r \neq 0$, maka PD tersebut tak homogen.

Solusi yang dikenalkan dalam memecahkan masalah atau soal PD linear orde 1, 2, 3, hingga orde orde-n disebut solusi dengan metode biasa (metode koefisien taktentu, metode operator D, dan metode reduksi orde). Sedangkan, solusi lain yang dikenalkan oleh Mutua disebut solusi dengan Metode Mutua (*Mutua's Method*). Kedua metode ini sangat penting untuk diketahui dan dipahami oleh mahasiswa, dosen maupun peneliti, agar dapat memilih metode yang terbaik yakni mudah dan cepat menemukan solusi atas permasalahan yang dihadapi serta mudah diterapkan dalam permasalahan tekstual maupun kontekstual yang lebih kompleks. Keterbaruan dari penelitian ini adalah mengungkap kelebihan dari metode mutua dibandingkan dengan metode koefisien taktentu, metode operator D dan metode reduksi orde (disebut metode biasa/umum) dalam penerapannya terhadap uji bilangan PD orde dua tak homogen hingga PD orde-n. Selain itu, penelitian ini juga mengungkapkan kekurangan dari metode mutua, dan melakukan perbaikan atas penulisan rumus yang keliru.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan jenis penelitian deskriptif kualitatif menggunakan metode studi pustaka (*library research*). Adapun langkah-langkah yang digunakan sebagai yaitu menganalisis metode koefisien tak tentu, metode operator D, metode reduksi orde, dan metode mutua. Menganalisis dan membandingkan langkah-langkah atau prosedur penyelesaian metode mutua dengan metode koefisien tak tentu, metode operator D, metode reduksi orde pada kasus persamaan diferensial tak homogen. Mengaplikasikan ke persoalan nyata khususnya persamaan linear orde 1 dan orde 2, dan menarik kesimpulan. Tahap analis dilakukan dengan mengamati definisi dan prosedur penyelesaian masing-masing metode tersebut dan metode mutua, meneliti prosedur penyelesaian keduanya pada contoh-contoh soal, baik soal biasa maupun soal yang berkaitan dengan permasalahan nyata. Berdasarka hasil pengamatan kemudian diambil sebuah kesimpulan.



Gambar 1. Alur Metode Penelitian

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Definisi Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah setiap persamaan yang di dalamnya terdapat turunan atau diferensial [5]. Beberapa ketentuan yang berkaitan dengan definisi persamaan diferensial sebagai berikut.

a) Turunan dapat dianggap sebagai diferensial variabel tak bebas dibagi diferensial variabel bebasnya.

b) $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$ disebut turunan atau *derrivative* ke-n dari y terhadap x. $d^n y$ disebut diferensial dari y yang artinya perubahan kecil mendekati nol dari y.

c) Variabel tak bebas adalah variabel yang nilainya bergantung pada nilai variabel bebas. Huruf y sering dipakai sebagai lambang variabel tak-bebas. Huruf x dan t sering dipakai sebagai lambang variabel bebas.

d) Orde atau tingkat PD adalah turunan tertinggi variabel tak-bebas terhadap variabel bebasnya.

e) Derajat PD adalah derajat atau pangkat dari turunan tertinggi yang terjadi.

f) PD linear adalah sebuah PD dengan suku linear dalam y dan turunannya. Suku linear adalah suku berderajat satu, bukan perkalian dan bukan fungsi transenden yaitu fungsi trigonometri, fungsi eksponensial dan logaritma.

g) PD biasa adalah PD dengan variabel bebas tunggal, jadi diferensialnya diferensial biasa bukan diferensial parsial. PD parsial adalah PD dengan variabel bebas lebih dari satu, jadi memakai diferensial parsial.

2. Bentuk Umum dan Karakteristik PD Linear Orde-n

Bentuk umum PD linear orde-n. Adapun bentuk umum PD linear orde-n adalah $y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + p_1 y' + p_0 y = r$ dimana fungsi p dan r merupakan fungsi x atau konstan dan tidak mengandung y. Persamaan Diferensial (PD) linear orde-n memiliki karakteristik antara lain:

a) y^n adalah turunan y ke-n

b) PD linear jika $p_{0,}\, p_1, \dots, p_{n-1}$ dan r merupakan fungsi dari x, atau konstan, tidak berisi y.

c) PD tak linear jika $p_{0,}\, p_1, \dots, p_{n-1}$ ada yang berisi y atau r berisi y berpangkat selain nol atau satu

d) Jika $r \neq 0$, disebut PD linear orde-n tak homogen.

e) Jika $r = 0$, disebut PD linear orde-n homogen.

f) Jika $p_{0,}\, p_1, \dots, p_{n-1}$ merupakan konstan, disebut PD linear orde-n koefisien konstan.

3. Prinsip Solusi PD Tak Homogen

Prinsip dari solusi umum untuk PD tak homogen berbentuk: $y = y_h + y_p$, dimana:

a) y adalah solusi umum PD tak homogen: $y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + p_1 y' + p_0 y = r$.

b) y_h adalah solusi bagian PD homogen: $y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + p_1 y' + p_0 y = 0$.

c) y_p adalah solusi khusus PD tak homogen: $y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + p_1 y' + p_0 y = r$

4. Prinsip Solusi PD Homogen

Prinsip dari solusi umum untuk PD homogen berbentuk: $y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + p_1 y' + p_0 y = 0$ [5][8].

a) $y_h = C_1 e^{\gamma_1 x} + C_2 e^{\gamma_2 x} + \cdots + C_n e^{\gamma_n x}$, untuk n bilangan bulat dan γ akar-akar karakteristik yang berbeda yakni ketika $D > 0$.

b) $y_h = C_1 e^{\gamma_1 x} + C_2 x e^{\gamma_2 x} + C_3 x^2 e^{\gamma_3 x} + \cdots + C_n x^{n-1} e^{\gamma_n x}$, untuk n bilangan bulat dan γ akar-akar karakteristik yang sama yakni ketika $D = 0$.

c) $y_h = e^{\gamma_1 x} C_1 cos\, \omega_1 x + e^{\gamma_1 x} C_2 \sin \omega_1 x + \cdots + e^{\gamma_n x}(C_n \cos \omega_n x + C_{n+1} cos\omega_n x)$, untuk n bilangan bulat dan γ akar-akar karakteristik konjugat kompleks yakni ketika $D < 0$.

Secara umum, Wayan Degeng mengklasifikasikan solusi PD menjadi 4 macam, yaitu solusi umum, solusi khusus, solusi singular dan solusi implisit [5]. Solusi umum menurutnya adalah solusi PD dengan konstanta sebarang sebanyak orde-nya. Sebuah pengintegralan akan memunculkan sebuah konstanta sebarang lain. Solusi PD diperoleh antara lain dengan pengintegralan sebanyak ordenya. Hal ini berimplikasi bahwa PD orde satu akan mempunyai solusi umum dengan sebuah konstanta sebarang, sedangkan PD orde-n akan mempunyai solusi umum dengan n konstanta sebarang. Kemudian, solusi PD khusus prinsipnya sama dengan solusi PD umum dengan konstanta sebarang yang telah diganti dengan angka riil tertentu. Solusi singular adalah solusi lain yang tidak mungkin diperoleh dengan cara menentukan nilai tertentu bagi konstanta sebarang pada solusi umum. Selanjutnya, solusi implisit merupakan solusi PD yang berbentuk $G(x, y) = 0$. Semua variabel ada di satu ruas, yang berbeda dengan solusi biasanya yaitu solusi eksplisit yang berbentuk $y = f(x)$.

5. Studi Kasus Solusi Penyelesaian Persamaan Diferensial (PD) Orde Dua

Persamaan diferensial orde dua tak homogen adalah sebuah persamaan diferensial yang memiliki bentuk umum $y'' + py' + qy = r$. Prinsip solusi PD tak homogen orde dua berbentuk $y = y_h + y_p$, dimana y merupakan solusi umum PD ak homogen, sedangkan y_h merupakan solusi umum PD homogen, dan y_p adalah suatu solusi khusus PD tak homgen. Perlu diingat Kembali bahwa PD $y'' + py' + qy = r$ disebut PD orde dua tak homogen bila $r \neq 0$. Sementara PD orde dua itu disebut homogen bila $r = 0$.

Selanjutnya, pada kasus uji bilangan ini akan diungkapkan beberapa metode penyelesaian sebagai solusi dari PD orde dua tak homogen. Beberapa metode tersebut, yaitu 1) metode homogen dan tak homogen, metode operator D, metode reduksi orde, dan metode Mutua.

a. Solusi PD Orde Dua Dengan Metode Koefisien Taktentu

Metode penyelesaian ini digunakan khusus pada kasus PD orde dua hingga orde-n tak homogen. Metode ini seringkali disebut dengan metode PD linear homogen tak homogen. Disebut demikian, karena prosedur penyelesaiannya membagi menjadi persamaan umum ke dalam dua persamaan homogen dan tak homogen. Suatu solusi khusus PD tak homogen, y_p diperoleh dari mencoba-coba (*trial and error*) yang bergantung pada r. Bentuk solusi khusus sama dengan bentuk r tetapi dengan koefisien taktentu yang harus dihitung. Berikut ini adalah tabel beberapa bentuk r, bentuk solusi khususnya dan koefisien taktentu yang harus dihitung.

Tabel 1. Solusi Khusus dengan Koefisien Taktentu

No.	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{y_p}$	***Koefisien tak tentu yang harus dihitung***
1.	ae^{cx}	ke^{cx}	k
2.	$ax^n (n = 0,1,2, \dots)$	$y_p = k_n x^n + k_{n-1}x^{n-1} + \cdots + k_0$	$k_n, k_{n-1}, \dots, k_0$
3.	$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$		
4.	a $\sin \omega\, x$	$A \cos \omega x + B \sin \omega x$	A dan B
5.	a $\cos \omega\, x$		

Metode ini seringkali disebut dengan metode penyelesaian PD linear homogen dan tak homogen [9]. Langkah-langkah penyelesaian yang dilakukan:

1) Menentukan solusi umum PD homogen: y_h
2) Menentukan solusi PD tak homogen: y_p
3) Menentukan solusi umum PD tak homogen: $y = y_h + y_p$

Contoh 1: Carilah solusi umum PD: $y'' + 5y' + 6y = 2e^{-x}$

Penyelesaian:

Solusi umum PD

$$y = y_h + y_p$$

PD homogen

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

Persamaan karakteristik

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \text{ atau } (\lambda + 3)(\lambda + 2) = 0$$

Akar-akar persamaan

$$\lambda_1 = -2 \text{ dan } \lambda_2 = -3$$

Solusi PD homogen

$$y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$$

Selanjutnya, mencari nilai y_p:

Karena r dan y_h sama-sama berisi e^x, maka:

$$y_p = ke^{-x}$$

$$y'_p = -ke^{-x}$$
$$y''_p = ke^{-x}$$
Kemudian, substitusikan ke dalam PD semula:
$$ke^{-x} + 5(-ke^{-x}) + 6(ke^{-x}) = 2e^{-x}$$
$$ke^{-x} - 5ke^{-x} + 6ke^{-x} = 2e^{-x}$$
$$k - 5k + 6k = 2,$$
$$k = 1 \text{ dan } y_p = e^{-x}$$
Jadi, solusi umum PD adalah: $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x} + e^{-x}$

b. Solusi PD Orde Dua Dengan Metode Operator D

Metode operator D didasarkan pada pemahaman tentang lambing-lambang $D_{y,} D^2y, \dots, D^ny$, dipakai untuk menyatakan diferensial diferensial y terhadap x berturut-turut sebagai berikut:
$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}$$
$D, D^2, \dots, D^n$, dinamakan *operator deferensial* atau operator D yang bersifat seperti besaran aljabar. D^2y dapat diartikan bahwa D kuadrat kali y. kemudian, dengan menggunakan lambing ini, dapat dituliskan bentuk umum PD linear orde-n sebagai berikut:
$$\{D^{(n)} + p_{n-1}D^{(n-1)} + \cdots + p_1D + p_0\}y = r.$$
Langkah-langkah penyelesaian PD dua dengan Teknik Operator adalah mengubah sistem persamaan diferensial kedalam teknik operator yaitu $F(D)y_p = Q$, mengeliminasikan untuk menentukan nilai yaitu: $y_p = \frac{1}{F(D)}Q$, menentukan fungsi komplementer dalam menentukan akar-akar riil dan berbeda, akar-akar yang berulang dan akar-akar kompleks, menentukan integral khusus dengan menggunakan sifat-sifat teknik operator D untuk solusi umum, sehingga diperoleh solusi umum dari sistem PD orde-2 yaitu $y = F.Komplemneter + Integral\ Khusus$ [9]. Langkah-langkah penyelesaian yang dilakukan yaitu:

1) Mengubah sistem persamaan diferensial ke dalam teknik operator D: $F(D)y_p = Q$
2) Mengeleminasikan untuk menentukan nilai: $y_p = \frac{1}{F(D)}Q$
3) Menentukan fungsi komplementer dalam menentukan akar-akar riil dan berbeda, akar-akar yang berulang dan akar-akar kompleks
4) Menentukan integral khusus dengan menggunakan sifat-sifat teknik operator-D untuk solusi umum
5) Menentukan solusi umum sistem persamaan diferensial orde dua:
$$y = F.Komplemneter + Integral\ Khusus$$

Contoh 2: Carilah solusi umum PD: $y'' + 5y' + 6y = 2e^{-x}$ menggunakan metode operator D!

Penyelesaian:
Solusi umum PD
$$y = y_h + y_p$$
Persamaan Diferensial
$$y'' + 5y' + 6y = 2e^{-x}$$
Persamaan diubah
$$(D^2 + 5D + 6)y = 0 \text{ atau } (D + 3)(D + 2) = 0$$
Akar-akar persamaan
$$D_1 = -2 \text{ dan } D_2 = -3$$
Solusi PD homogen

$$y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$$

Selanjutnya, mencari nilai y_p:

Karena r dan y_h sama-sama berisi e^x, maka:

$$y_p = ke^{-x}$$
$$y'_p = -kxe^{-x} + ke^{-x}$$
$$y''_p = kxe^{-x} - ke^{-x} - ke^{-x}$$

Kemudian, disubstitusikan ke dalam PD semula:

$$kxe^{-x} - ke^{-x} - ke^{-x} + 5(-kxe^{-x} + ke^{-x}) + 6(kxe^{-x}) = 2e^{-x}$$
$$kxe^{-x} - ke^{-x} - ke^{-x} - 5kxe^{-x} + 5ke^{-x} + 6kxe^{-x} = 2e^{-x}$$
$$7kxe^{-x} - 5kxe^{-x} + 3ke^{-x} = 2e^{-x}$$
$$2kxe^{-x} + 3ke^{-x} = 2e^{-x}$$
$$k = 1 \text{ dan } y_p = e^{-x}$$

Jadi, solusi umum PD adalah: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} + e^{-x}$

c. Solusi PD Orde Dua Dengan Metode Reduksi Orde

Metode reduksi orde ialah sebuah metode penyelesaian PD umum tak homogen dengan menggunakan pemisalan $(D - d_2) \dots (D - d_n)y = r$. Kemudian, $(D - d_1)Y_1 = r$ merupakan PD linear tak homogen koefisien konstan dalam Y_1, yang dapat dislesaikan untuk Y_1.

Selanjutnya, memisalkan $(D - d_3) \dots (D - d_n)y = Y_2$, sehingga $(D - d_2)Y_2 = Y_1$ dan ini merupakan PD linear tak homogen koefisien konstan dalam $Y_{2,}$ yang dapat diselesaikan untuk Y_2. Langkah-langkah penyelesaian yang dilakukan:

1) Mengubah persamaan diefrensial ke dalam operator D
2) Mereduksi orde ke dalam persamaan baru
3) Menentukan integral khusus dengan menggunakan sifat-sifat teknik operator-D untuk solusi umum
4) Menentukan solusi umum persamaan diferensial

Contoh 3: Carilah solusi umum PD: $y'' + 5y' + 6y = 2e^{-x}$ menggunakan metode reduksi orde!

Penyelesaian:

Solusi umum PD

$$y = y_h + y_p$$

Persamaan Diferensial

$$y'' + 5y' + 6y = 2e^{-x}$$

Persamaan diubah

$$(D^2 + 5D + 6)y = 2e^{-x}$$

Misalkan

$$(D + 3)y = Y_1 \text{ maka } (D + 2)Y_1 = 2e^{-x}$$

Ini adalah PD linear tak homogen koefisien konstan, dengan solusi:

$$Y_1 = e^{-2x}\left[2\int e^{2x}e^{-x}dx + C_1\right]$$
$$Y_1 = e^{-2x}[2e^x + C_1] = C_1 e^{-2x} + 2e^{-x}$$
$$(D + 3)y = Y_1 = C_1 e^{-2x} + 2e^{-x}$$

Ini adalah PD linear tak homogen koefisien konstan, dengan $p = 3$, sehingga $h = 3x$.

$$y = e^{-3x}\left[\int e^{3x}(C_1 e^{-2x} + 2e^{-x})dx + C_2\right]$$
$$y = e^{-3x}\left[\int (C_1 e^{x} + 2e^{2x})dx + C_2\right]$$
$$y = e^{-3x}[C_1 e^x + e^{2x} + C_2]$$

Jadi, solusi umum PD adalah: $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x} + e^{-x}$

d. Solusi PD Orde Dua Dengan Metode Mutua

1) Tak Tentu Bentuk Ae^{cx}

Metode Mutua memberikan solusi bahwa pada kasus koefisien tak tentu bentuk Ae^{cx} dapat dicari dengan rumus $A = \frac{1}{f(c)}$, dimana $a \neq 0$, dan c bukan merupakan akar-akar dari PD linear $orde - n$ bentuk:

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = e^{cx}.$$

Dengan demikian, persamaan karakteristiknya adalah

$$f(m) = a_n m^n + a_{n-1}m^{n-1} + \cdots + a_1 m^1 + a_0.$$

Sebuah polinomial $p_q(t)$ berderajat q untuk $q \leq n$ didefinisikan sebagai: $p_q(t) = (t - m_1)(t - m_2) \ldots (t - m_{q-1})(t - m_q)$, dimana $m_1, m_2, \ldots, m_q$ adalah sebuah himpunan bagian dari semua akar-akar $f(m)$ yang tidak sama dengan c. Polinomial tertentu ini disebut sebagai sesuatu yang digunakan untuk menentukan integral tertentu (*particuler integral*). Jika semua akar-akar persamaan karakteristik tidak sama dengan c, maka diperoleh persamaan $f(c) \neq 0$. Kemudian mengambil polinomial tertentu menjadi $p(t) = a_n m^n + a_{n-1}m^{n-1} + \cdots + a_1 m^1 + a_0$. Selanjutnya, koefisien A pada persamaan integral: $y_p = Ae^{Cx}$ menjadi $A = \frac{1}{p(c)}$. Hal demikian sama dengan $y_p = \frac{1}{p(c)}e^{Cx}$ [10]. Langkah-langkah penyelesaian yang dilakukan:

1) Menentukan karakteristik PD homogen
2) Menentukan solusi PD homogen: y_h
3) Menggunakan Rumus Mutua untuk mencari nilai $y_p = \frac{1}{p(c)}e^{Cx}$
4) Menentukan solusi umum persamaan diferensial: $= y_h + y_p$

Contoh 4: Carilah solusi umum PD: $y'' + 5y' + 6y = 2e^{-x}$ dengan menggunakan metode Mutua!

Penyelesaian:

Solusi umum PD

$$y = y_h + y_p$$

Persamaan Diferensial

$$y'' + 5y' + 6y = 2e^{-x}$$

PD homogen

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

Persamaan karakteristik

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \text{ atau } (\lambda + 3)(\lambda + 2) = 0$$

Akar-akar persamaan

$$\lambda_1 = -2 \text{ dan } \lambda_2 = -3,$$

Solusi PD homogen

$$y_h = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x}$$

Selanjutnya, mencari nilai y_P:

$$y_p = Ae^{Cx} \text{ atau } y_p = \frac{1}{p(c)}e^{Cx}$$

Karena $c = -1$ dan berbeda dengan akar-akar $\lambda_1 = -2$ dan $\lambda_2 = -3$, maka:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 6$$

$$p(-1) = (-1)^2 + 5(-1) + 6 = 1 - 5 + 6 = 2$$

$$A = \frac{1}{p(c)} = \frac{1}{2}$$

Kemudian disubstitusikan ke $y_p = 2e^{-x}$,

$$y_p = e^{-x} \text{ (bentuk lain dari } 2 = \frac{1}{A} = 1 : \frac{1}{2} = 1x\frac{2}{1} = 2)$$
$$y = y_h + y_p = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x} + e^{-x}.$$

Jadi, solusi umum PD adalah: $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x} + e^{-x}$

2) Koefisien Tak Tentu Bentuk $Ax^n e^{cx}$

Solusi Persamaan Diferensial (PD) linear dengan koefisien tak tentu bentuk $Ax^n e^{cx}$ atau bila ditulis lengkap sebagai bentuk $y_p = Ax^n e^{cx}$ berbeda formula untuk $n > 1$. Adapun formula bentuk ini adalah $y_p = \frac{1}{k!P_{n-k}(c)} x^k e^{cx}$, dengan $k = 0,1,2,3, \dots, n$, untuk n bilangan asli. Hal ini diberlakukan ketika $m_1 = m_2 = \cdots = m_k = c$ dan $m_{k+1}, \dots, m_n \neq c$. Tentunya $f(m) = (m - m_1)(m - m_2) \dots (m - m_k) \dots (m - m_n)$ [10][11]. Langkah-langkah penyelesaian yang dilakukan:

1) Menentukan karakteristik PD homogen
2) Menentukan solusi PD homogen: y_h
3) Menggunakan Rumus Mutua untuk mencari nilai: $y_p = \frac{1}{k!P_{n-k}(c)} x^k e^{cx}$
4) Menentukan solusi umum persamaan diferensial: $= y_h + y_p$

Contoh 5: Carilah solusi umum PD: $y'' - 3y' + 2y = e^x$ dengan menggunakan metode Mutua!

Penyelesaian:

Solusi umum PD
$$y = y_h + y_p$$
Persamaan Diferensial
$$y'' - 3y' + 2y = e^x$$
PD homogen
$$y'' - 3y' + 2y = 0$$
Persamaan karakteristik
$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \text{ atau } (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$
Akar-akar persamaan
$$\lambda_1 = 1 \text{ dan } \lambda_2 = 2,$$
Solusi PD homogen
$$y_h = C_1e^x + C_2e^{2x}.$$
Selanjutnya, mencari nilai y_p:
$$y_p = \frac{1}{k!P_{n-k}(c)} x^k e^{cx} \text{ atau } y_p = Ax^n e^{cx}$$
Karena $c = 1$ dan sama dengan akar-akar $\lambda_1 = 1$ serta berbeda dengan $\lambda_2 = 2$, maka untuk $y_p = Axe^x$
$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_2)$$
$$p(1) = (1 - 2) = -1$$
$$y_p = \frac{1}{k!\,P_{n-k}(c)} x^k e^{cx}$$
$$y_p = \frac{1}{1! - 1} x^1 e^{1x} = -xe^x$$
Kemudian, disubstitusikan ke $y_p = Axe^x$,
$$y_p = -xe^x.$$
$$y = y_h + y_p = C_1e^x + C_2e^{2x} - xe^x.$$
Jadi, solusi umum PD adalah: $y = C_1e^x + C_2e^{2x} - xe^x$

Contoh 6: Carilah solusi umum PD: $y''' - y' - 4y + 4 = e^{2x}$ dengan menggunakan metode Mutua!

Penyelesaian:

Solusi umum PD

$$y = y_h + y_p$$

Persamaan Diferensial

$$y''' - y' - 4y + 4 = e^{2x}$$

PD homogen

$$y''' - y' - 4y + 4 = 0$$

Persamaan karakteristik

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \text{ atau } (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$$

Akar-akar persamaan

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \text{ dan } \lambda_3 = -2$$

Solusi PD homogen

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}$$

Selanjutnya, mencari nilai y_p:

$$y_p = \frac{1}{k! P_{n-k}(c)} x^k e^{cx} \text{ atau } y_p = A x^n e^{cx}$$

Karena $c = 2$ dan sama dengan akar-akar $\lambda_2 = 1$ serta berbeda dengan $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_3 = -2$, maka untuk $y_p = Axe^{2x}$

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda + \lambda_3)$$

$$p(2) = (2 - 1)(2 + 2) = 4$$

$$y_p = \frac{1}{k!\, P_{n-k}(c)} x^k e^{cx}$$

$$y_p = \frac{1}{1!4} x^1 e^{2x} = \frac{1}{4} x e^{2x},$$

Kemudian, disubstitusikan ke $y_p = Axe^{2x}$, sehingga didapatkan:

$$y_p = \frac{1}{4} x e^{2x}.$$

$$y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x} + \frac{1}{4} x e^{2x}.$$

Jadi, solusi umum PD adalah: $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x} + \frac{1}{4} x e^{2x}$

Contoh 7: Gunakanlah metode Mutua untuk mencari solusi umum PD: $y''' - 3y' + 3y - 1 = 4e^x$.

Penyelesaian:

Solusi umum PD

$$y = y_h + y_p$$

Persamaan Diferensial

$$y''' - 3y' + 3y - 1 = 4e^x.$$

PD homogen

$$y''' - 3y' + 3y - 1 = 0$$

Persamaan karakteristik

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \text{ atau } (\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1,$$

Maka:

$$y_h = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x.$$

Kemudian, mencari nilai y_p:

Karena $c = 1$ dan sama dengan dengan semua akar-akar $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, maka $y_p = Ax^3 e^x$

$$p(\lambda) = \lambda$$
$$p(1) = 1$$
$$y_p = \frac{1}{k!\,P_{n-k}(c)}x^k e^{cx}$$
$$y_p = 4\frac{1}{3!1}x^3 e^{1x} = \frac{4}{3}x^3 e^x \ ,$$
$$y_p = \frac{1}{4}xe^{2x}.$$
$$y = y_h + y_p = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x + \frac{2}{3}e^3e^x.$$
Jadi, solusi umum PD adalah: $y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x + \frac{2}{3}x^3e^x$

6. Aplikasi PD Linear

Persamaan diferensial (PD) linear banyak memiliki manfaat dalam kehidupan seharihari baik dalam kegiatan bisnis, ekonomi, industri dan kegiatan lainnya yang bersifat mikanis. Berikut dipaparkan beberapa aplikasi PD:

a) Hukum Maltus

Hukum Maltus yang umum dikenal dengan hukum pertumbuhan eksponensial menyebutkan bahwa laju pertumbuhan suatu populasi (mikroba, bakteri, serangga, manusia, binatang) sebanding dengan jumlah populasi saat itu. Jika y menyatakan jumlah populasi setiap saat, maka hukum maltus dinyatakan dengan $\frac{dy}{dt} = ky$, dimana k adalah konstanta pertumbuhan yang selalu bernilai positif. Mencari fungsi waktu sebagai $y(t)$ atau mencari solusi umum PD atau juga ingin mengetahui populasi setiap saat untuk keadaan khusus tertentu, misalnya untuk jumlah populasi mula-mula tertentu diketahui. Ini merupakan aplikasi dari PD linear orde-n. Selain pada hukum Maltus, berlaku juga Hukum Newton 1, kecepatan benda, rangkaian listrik dan hukum peluruhan eksponensial serta hukum tegangan Kirchoff.

Contoh 8: Suatu benda bergerak pada garis lurus sepanjang sumbu$-y$ dengan kecepatan menurut persamaan $v = 20t + 3$. Jika mula-mula posisi benda adalah 10 meter, hitunglah posisi benda setelah 40 detik.

Penyelesaian:

Jika posisi benda setiap saat adalah y, maka kecepatan benda:
$$\frac{dy}{dt} = v = 20t + 3$$
Diketahui $y(0) = 10$ meter.
Ditanyakan $y(40)$?
Solusi:
$$\frac{dy}{dt} = 20t + 3$$
$$\int dy = \int (20t + 3)dt$$
$$y = 10t^2 + 3t + C$$
$$y(0) = 10$$
maka diperoleh $C = 10$
$$y(40) = 10(40^2) + 3(40) = 16.130 \text{ meter.}$$

b) Hukum Newton II

Hukum Newton II menyebutkan bahwa jika sebuah benda memperoleh gaya sebesar F, maka benda tersebut akan mengalami percepatan dengan hubungan $F = m\frac{d^2x}{dt^2}$, dimana x adalah posisi benda itu setiap saat. Hukum Newton II merupakan aplikasi dari PD linear orde dua. Selain hukum Newton juga diterapkan dalam hukum Hooke untuk pegas yang menyebutkan jika salah satu ujung pegas dijepit sedangkan ujung yang lain ditarik, maka ada gaya yang bekerja pada penarik yang sebanding dengan perpindahan ujung itu tetapi berlawanan arah dengan perpindahan ujung itu. Rumus: $F_1 = -ky$.

Contoh 9: Sebuah bola besi dengan berat $W = 89$ Newton (sekitar 9 kg) meregangkan sebuah pegas 10 cm. Mula-mula massa ditarik ke bawah 15 cm lagi, lalu dilepas. Massa mengalami redaman dengan faktor redaman $c = 179{,}8$ kg/det. Hitunglah persamaan gerak sistem, $y(t)$!

Penyelesaian:

Konstanta pegas

$$k = 89\frac{Newton}{10}cm = 890\ Newton/meter$$

Massa benda

$$m = \frac{W}{g} = \frac{89}{9{,}8} = 9{,}082\ kg$$

PD sistem

$$y'' + \frac{c}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0$$

$$y'' + \frac{179{,}8}{9{,}082}y' + \frac{890}{9{,}082}y = 0$$

$$y'' + 19{,}8y' + 98y = 0$$

Karena merupakan orde dua homogen, akar-akar kembarnya $m = -9{,}899$

Solusi umum:

$$y(t) = (C_1 + C_2t)e^{-9{,}899t}$$

Mencari solusi khusus dengan $y(0) = 0{,}15$ dan $y'(0) = 0$, diperoleh $C_1 = 0{,}15$ dan $C_2 = 1{,}485$. Jadi, solusi khusus

$$y(t) = (0{,}15 + 1{,}485t)e^{-9{,}899t}$$

Berdasarkan beberapa contoh yang telah di bahas di atas, baik berkenaan dengan koefisien tak tentu bentuk $y_p = Ae^{cx}$ maupun bentuk $y_p = Ax^ne^{cx}$, metode mutua memang lebih mudah dan cepat memperoleh hasil pemecahan daripada metode biasa/umum yakni metode koefisien taktentu, metode operator D, dan metode reduksi orde, yang selama ini diterapkan khususnya dalam menyederhanakan proses perhitungan yang terlibat dalam memperoleh integral tertentu. Akan tetapi berdasarkan hasil pengamatan, peneliti menemukan bahwa ada rumus matematis yang dalam penulisannya kurang konsisten atau kurang lengkap antar yang dituliskan dengan yang diterapkan dalam uji bilangan atau contoh soal. Rumus yang dimaksud adalah: $A = \frac{1}{p(c)}$, disebut sebagai rumus pertama.

Menurut hemat peneliti, sebaiknya dituliskan lengkap bahwa bentuk $y_p = Ae^{cx}$, solusi khusunya berupa $y_p = \frac{A}{p(c)}e^{cx}$, untuk c berbeda dengan semua akar-akar dari persamaan karakteristiknya. Kemudian, jika c sama dengan akar-akar karakteristiknya baik salah satu atau seluruhnya, maka dapat digunakan rumus kedua: $y_p = \frac{1}{k!P_{n-k}(c)}x^ke^{cx}$.

Penerapan rumus kedua pada uji bilangan yang dilakukan, sedikit membingungkan karena tiba-tiba memunculkan nilai bukan satu untuk $A > 1$. Padahal di awal yang dituliskan sebagai pembilang hanya 1. Kondisi ini sangat sulit dipahami bila tidak dicerna dengan baik, sehingga bagi peneliti, rumus ini juga perlu diperlengkap bahwa untuk $y_p = Ax^ne^{cx}$ berlaku rumus $y_p = \frac{A}{k!P_{n-k}(c)}x^ke^{cx}$. Selain itu, menurut hemat peneliti diketahui bahwa untuk c yang sama dengan $k = 1$, dapat pula dikerjakan langsung menggunakan rumus yang pertama, yang terpenting pengguna bisa memahami bahwa banyaknya k menunjukkan banyaknya pangkat tertinggi dari variabel x dalam PD linear orde-n. Hal ini dapat dibuktikan dengan contoh berikut: akan dikerjakan dengan menggunakan satu cara pertama cara kedua sudah pada contoh di atas.

Contoh 10: Carilah solusi umum PD: $y''' - y' - 4y + 4 = e^{2x}$!

Penyelesaian:

Solusi umum PD

$$y = y_h + y_p$$

Persamaan Diferensial

$$y''' - y' - 4y + 4 = e^{2x}$$

PD homogen

$$y''' - y' - 4y + 4 = 0$$

Persamaan karakteristik

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \text{ atau } (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$$

Akar-akar persamaan

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \text{ dan } \lambda_3 = -2$$

sehingga diperoleh:

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}$$

Mencari nilai $y_p = \frac{A}{p(c)} x e^{2x}$:

Karena $c = 2$ dan sama dengan akar-akar $\lambda_2 = 1$ serta berbeda dengan $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_3 = -2$, selanjutnya dicoba untuk $y_p = Axe^{2x}$. A sebagai koefisien dari x dan sementara x hanya berpangkat 1 karena banyaknya $k = 1$, dimana k menjelaskan banyaknya akar-akar karakteristik yang sama dengan c.

$$p(c) = (c - \lambda_1)(c + \lambda_3)$$
$$p(2) = (2 - 1)(2 + 2) = 4$$
$$y_p = \frac{A}{p(c)} x e^{2x}$$
$$y_p = \frac{1}{4} x e^{2x}$$
$$y_p = \tfrac{1}{4} x e^{2x}.$$
$$y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x} + \tfrac{1}{4} x e^{2x}.$$

Jadi, solusi umum PD adalah: $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x} + \frac{1}{4} x e^{2x}$.

Contoh 11: Carilah solusi umum PD: $y'' - 3y' + 2y = e^x$

Penyelesaian:

Solusi umum PD

$$y = y_h + y_p$$

Persamaan Diferensial

$$y'' - 3y' - 2y = e^x$$

PD homogen

$$y'' - 3y' - 2y = 0$$

Persamaan karakteristik

$$\lambda^2 - 3\lambda - 2 = 0 \text{ atau } (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$$

Akar-akar persamaan

$$\lambda_1 = 1, \text{ dan } \lambda_2 = 2$$

Mencari nilai $y_p = Axe^x$:

Karena $c = 1$ dan sama dengan akar-akar $\lambda_1 = 1$ serta berbeda dengan $\lambda_2 = 2$, berarti $k = 1$.

$$y_p = Axe^x$$
$$p(c) = (c - \lambda_2)$$
$$p(1) = (1 - 2) = -1$$
$$y_p = \frac{A}{p(c)} xe^x$$
$$y_p = \frac{1}{-1} xe^x = -xe^x$$
$$y_p = -xe^x.$$
$$y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - xe^x.$$

Jadi, solusi umum PD adalah: $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - xe^x$.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil analisis terhadap penggunaan metode koefisien tak tentu, metode operator D, dan metode reduksi orde (disebut metode biasa atau umum) dan terhadap metode mutua yang telah digunakan pada uji bilangan untuk polinomial koefisien tak tentu bentuk Ae^{cx} dan $Ax^n e^{cx}$ terbukti bahwa metode mutua cenderung lebih mudah dan cepat menemukan solusi atau pemecahan soal yang dihadapi dibandingkan dengan metode biasa atau umum. Metode mutua dapat memberikan penyelesaian akhir hanya dengan beberapa langkah penyelesaian ketika diterapkan pada persamaan diferensial linear orde tinggi, karena prosedur penyelesaian yang digunakan lebih sederhana. Meskipun demikian, terdapat kekurangan atas rumus pada metode mutua, penulisannya masih terlihat kurang lengkap atau kurang konsisten antara yang dituliskan dengan yang diterapkan dalam uji bilangan atau contoh soal. Pemikiran peneliti atas koreksi dan sebagai rekomendasi atas kedua rumus tersebut adalah $y_p = Ae^{cx}$, solusi khususnya berupa $y_p = \frac{A}{p(c)} e^{cx}$, untuk c berbeda dengan semua akar-akar dari persamaan karakteristiknya. Kemudian, jika nilai c sama dengan akar-akar karakteristiknya baik salah satu atau seluruhnya, maka dapat digunakan rumus kedua: $y_p = \frac{A}{k! P_{n-k}(c)} x^k e^{cx}$.

Adapun saran yang peneliti sampaikan yaitu materi dan metode Mutua sangat penting untuk dipelajari oleh semua kalangan akademisi, baik para mahasiswa, dosen dan peneliti karena memiliki banyak manfaat dan aplikatif, antara lain: Hukum Maltus, Newton satu, kecepatan benda, rangkaian listrik, hukum peluruhan eksponensial serta hukum tegangan Kirchoff, dan Hukum Newton II. Selain itu, Metode Mutua perlu dijadkan koreksi dan referensi untuk pengembangan metode-metode mutakhir dalam pemecahan masalah diferensial.

DAFTAR PUSTAKA

[1] M. Maswar. (2019). Strategi Pembelajaran Matematika Menyenangkan Siswa (MMS) Berbasis Metode Permainan Mathemagic, Teka-Teki Dan Cerita Matematis. *Alifmatika: Jurnal Pendidikan dan Pembelajaran Matematika*, vol. 1, no. 1, pp. 28–43, Dec. 2019, doi: 10.35316/alifmatika.2019.v1i1.28-43.

[2] E. Wahyu Andrechiana Supriyadi, dkk (2017). Analisis Kemampuan Koneksi Matematis Berdasarkan Nctm (National Council Of Teachers Of Mathematics) Siswa Smk Kelas Xi Jurusan Multimedia Pada Pokok Bahasan Hubungan Antar Garis. *Jurnal Nasional: Kadikma, Vol.8, No.1*, 128-136.

[3] A. Dwi Cahyanovianty. (2021). Analisis Kemampan Numerasi Peserta Didik Kelas VIII dalam Menyelesaikan Soal Asesmen Kompetensi Minimum," *Jurnal Cendekia: Jurnal Pendidikan Matematika*, Vol. 05, No. 02, pp. 1439–1448.

[4] I. Rina and R. Husna. (2019). Aplikasi Persamaan Diferensial pada Model Pertumbuhan Populasi dengan Pertumbuhan Terbatas. *Junal Nasional Saintek: Jurnal Sains dan Teknologi. Vol 11, No.1, 22-27.*

[5] Degeng, I Wayan. (2017). *Kalkulus Lanjut: Persamaan Diferensial dan Aplikasinya*. Diterbitkan oleh: Graha Ilmu, Yogyakarta.

[6] M. Malik, S. S. Abas, M. Mamat, and F. Sukono. (20190. Analisis Simetri Lie Persamaan Painleve Ince," *Jurnal Matematika Integratif, Vol. 15, No. 1, 45, Jul. 2019, doi: 10.24198/jmi.v15.n1.21022.45-52*.

[7] E. Sukma Cipta, D. Jarnawi, and A. Dahlan. (2021). Analisis pembelajaran persamaan diferensial berdasarkan artikel-artikel penelitian. *Jurnal Analisa, Vol. 7, No. 2, 164–173, doi: 10.18260/1-2.*

[8] Resmawan. (2018). *Persamaan Diferensial Biasa Persamaan Diferensian Biasa Orde N Koefisien Konstan*. Universitas Negeri Guruntalo. file:///C:/Users/HP/Downloads/resmawan-pd-linear-orde-2-homogen-koefisien-konstan%20(1).pdf. Diakses, 16 Desember 2022.

[9] I. Maja. (2017). Analisis Penyelesaian Persamaan Diferensialorde-2 Dengan Menggunakan Metode PD Homogen-Tak Homogen Dan Teknik Operator-D. *Diakses, 17 Desember 2022. .[Online].Available:* file:///C:/Users/HP/Downloads/JURNAL%20IBNU%20MAJA%20TH.%202017.pdf.

[10] S. F. Mutua. (2013). Mutua's Method Particular Polynomial And Coefficients Of Particular Integrals Of The Form. *Asian Journal of Mathematics And Applications, Vol. 2013, pp. 1–9, 2013, Accessed: Dec. 17, 2022. [Online].*